Hypergeometric representation of the solution of the singular Cauchy problem for fuchsian p.d.e. (Microlocal Analysis and Related Topics)

浦部, 治一郎

数理解析研究所講究録 1431 巻 2005 年 156-164

Hypergeometric representation of the solution of the singular Cauchy problem for fuchsian p.d.e.

同志社大学・文化情報学部　浦部 治一郎
Doshisha University　Jiichiroh Urabe

1. フックス型偏微分方程式とその定義

今から約３０年前、Bauendi-Goulaouic はその論文 ([BG-73]) において、確定特異点を持つ常微分方程式にならい、フックス型偏微分作用素を定義し、その解を構成した。その後、田原（[T-79])、萬代 ([M-00]) をはじめとして多くの研究がある。複素領域で $t=0$ にのみ特異性（多価性）を持つ斉次方程式 $Pu=0$ の解を構成するのが基本である。 Bauendi-Goulaouic の意味でのフックス型偏微分作用素とは次のように、定義される。

$t\in C, x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in C^n,\quad D_t=\frac{\partial}{\partial t}, D_x=\frac{\partial}{\partial x}.$ とし (t,x) 空間の原点の近傍 Ω で m 階の線形偏微分作用素

$$P=\sum_{j+|\alpha|\leq m}a_{j,\alpha}(t,x){D_t}^j{D_x}^\alpha$$

を考えよう。ここで $a_{j,\alpha}(t,x)$ は Ω で正則であり、

$$a_{j,\alpha}(t,x)=t^{v(j,\alpha)}\tilde{a}_{j,\alpha}(t,x)\qquad \tilde{a}_{j,\alpha}neq0$$

とかくことにする。係数 $a_{j,\alpha}(t,x)$ の t に関する vanishing order $v(j,\alpha)$ に対して

$$w(j,\alpha)=j-v(j,\alpha)$$

をこの項 $a_{j,\alpha}{D_t}^j{D_x}^\alpha$ の重み (weight) という。この偏微分作用素 P の各項の重みの最大値 $w(P)=Max_{j,\alpha}w(j,\alpha)$ 偏微分作用素 P の重みという。

(1) $w(P)\geq 0$

(2) $w(j,\alpha)=w(P)\Rightarrow\alpha=0$

(3) $w(m,0)=w(P),\tilde{a}_{m,0}(0,x)\neq 0$

偏微分作用素 P がこの3条件を満たすとき、P はフックス型偏微分作用素であるという。ここでは、斉次方程式を扱うので、このとき $\tilde{a}_{m,0}(0,x)=1$ として扱う。(必要なら Ω を小さくとる。) 重み $m-k$ のフックス型偏微分作用素とは次の形をしている。

$$P = t^k D_t{}^m + \sum_{j=1}^{k} P_j(t,x;D_x) t^{k-j} D_t{}^{m-j} + \sum_{j=k+1}^{m} P_j(t,x;D_x) D_t{}^{m-j}$$

ここで $P_j(0,x;D_x)\quad 1 \le j \le k$ は正則関数であり、$P_j(t,x;D_x)$ は $m-j$ 階の正則関数係数の偏微分作用素である。

$$Ch_P(x,\lambda) = \sum_{w(j,0)=w(P)} \tilde{a}_{j,0}(0,x)(\lambda)_{m-j} = t^{w(P)-\lambda} P(t^\lambda)|_{t=0}$$

を P の特性多項式といい、$Ch_P(x,\lambda)=0$ の根 $\lambda_j(x)$ を特性指数という。

2. 特異初期値問題

フックス型偏微分方程式の研究において、複素領域で $t=0$ にのみ特異性(多価性)を持つ斉次方程式 $Pu=0$ の解を構成する研究が多くなされてきた。さらに、ここでは、初期平面 $t=0$ の中の余次元1の超平面上に特異性を与え、そこから出発する特性面と初期平面の両方に特異性を持つ解を構成したい。一般のフックス型偏微分方程式を対象とすることは難しいので、次にあげる単純な複素2変数2階線形作用素 L に対する斉次方程式に対してこの問題を考えることにする。$C^2 \ni (t,x)$ 座標をとる。

$$L = tD_t^2 - D_x^2 - c(t,x)D_t - a(t,x)D_x - b(t,x)$$

ただし $a(t,x), b(t,x), c(t,x)$ は原点の近傍 Ω で正則な関数とする。

このフックス型偏微分作用素 L に対する次の特異初期値問題を考える。

$$\begin{cases} Lu(t,x) = 0 \\ u(0,x) = w(x) f_\alpha(x) \end{cases}$$

ここで $w(x)$ は Ω と初期平面 $E = \{(t,x)|t=0\}$. との共通部分 $\Omega \cap E$ で正則な関数であり、 初期値で与える特異性は

$$f_\alpha(x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

であり、また、この問題の解 $u(t,x)$ は初期条件 $u(0,x)=w(x)f_\alpha(x)$ をベーススペースの初期平面の原点を除いた部分で満たすことを要請することとする。

この特異初期値問題に対して、解 $u(t,x)$ を構成し、その特異性が何処に、どのように現れるのかを見ていくわけである。

まず、特異性の現れる所、つまり L の特性面について見てみよう。L のいわゆる主要部は

$$tD_t^2 - D_x^2$$

であり、特性方程式

$$(ch.eq.) \quad t{\varphi_t}^2 - {\varphi_x}^2|_{\varphi=0} = 0$$

をみたす曲面 $\{(t,x)|\varphi(t,x)=0\}$ を求めると、

曲線族 $E_s = \{(t,x)|4t=(x-s)^2\}$ とその包絡線である初期平面 $E = \{(t,x)|t=0\}$ からなっており、原点を通る特性面は $K = E_0 \cup E$ である。

この特性方程式 $(ch.eq.)$ に初期条件 $\varphi(0,x)=x$ を付け加えた初期値問題の解 ξ,η は

$$\xi = x - 2\sqrt{t}, \quad \eta = x + 2\sqrt{t}$$

で与えられる。

他方、このフックス型偏微分作用素 L に対する特性指数は

$$0, \quad 1 + c(0,x)$$

である。ここでの特異初期値問題では初期値の特異性は初期平面 E の原点にあるので $c(0,0)$ を c と書くことにする。つまり

$$c = c(0,0).$$

このフックス型偏微分作用素 L に対する次の主要部 P_c を考える。

$$P_c = tD_t^2 - D_x^2 - cD_t$$

このより単純なフックス型偏微分作用素 P_c に対する特異初期値問題を考えることから始めるわけである。

3.Euler - Poisson-Darboux 方程式と Laplace 列

この問題に関連して今から 1 世紀前に出版された G.Darboux の曲面論の名著 [D-96] から Laplace 列とそれらに関連した事項を思い起こそう。

ここに現れた $P_c u(t,x)=0$ は変数を (t,x) から $[\xi,\eta]$ に変換をすると Euler - Poisson 方程式 $E(\beta,\beta')$（今では Euler - Poisson-Darboux 方程式とも云う）

$$E(\beta,\beta') \qquad (D_\eta D_\xi - \frac{\beta'}{\xi-\eta}D_\xi + \frac{\beta}{\xi-\eta}D_\eta)u[\xi,\eta]=0$$

になる。実際

$$\begin{cases} \xi = x-2\sqrt{t} \\ \eta = x+2\sqrt{t} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \sqrt{t} = \frac{1}{4}(\eta-\xi) \\ x = \frac{1}{2}(\xi+\eta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_\xi = \frac{1}{2}(D_x - \sqrt{t}D_t) \\ D_\eta = \frac{1}{2}(D_x + \sqrt{t}D_t) \end{cases}, \qquad \begin{cases} D_t = \frac{4}{(\eta-\xi)}(D_\eta - D_\xi) \\ D_x = D_\eta + D_\xi \end{cases}$$

であり、P_c は-4 倍の Euler - Poisson 作用素 $(D_\eta D_\xi - \dfrac{\beta'}{\xi-\eta}D_\xi + \dfrac{\beta}{\xi-\eta}D_\eta)$ において

$$\beta=\beta'=-(\frac{1}{2}+c)$$

としたものとなる。

$$P_{\beta,\beta'} = (\xi-\eta)D_\eta D_\xi - \beta' D_\xi + \beta D_\eta$$

と置くと

$$\begin{cases} D_\xi P_{\beta,\beta'} = P_{\beta+1,\beta'}D_\xi \\ D_\eta P_{\beta,\beta'} = P_{\beta,\beta'+1}D_\eta \end{cases}$$

つまり、D_ξ, D_η は編微分作用素 $P_{\beta,\beta'}$ の昇降演算子の役割を果たしている。

Euler - Poisson 方程式 $E(\beta,\beta')$ は $\beta=0, \beta'=0$ のどちらかが成り立てば、簡単に積分で解けるわけであるが、この関係式によれば、次のことがわかる。

Euler - Poisson 方程式 $E(\beta,\beta')$ の解全体のつくる集合を $Z(\beta,\beta')$ で表すことにすると、$\beta \neq 0$ であれば、

$$D_\xi Z(\beta,\beta') = Z(\beta+1,\beta')$$

が成り立つ。また $\beta' \neq 0$ であれば、

$$D_\eta Z(\beta, \beta') = Z(\beta, \beta' + 1)$$

が成り立つ。一般には

$$D_\xi{}^m D_\eta{}^n Z(\beta, \beta') \subset Z(\beta + m, \beta' + n)$$

が成り立つ。また $(\beta)_m (\beta')_n \neq 0$ のとき上の式で等号が成り立つ。このことより、β, β' のどちらかが整数であれば、解を積分により求められ、整数でないときには Riemann-Liouville 積分を使って解を表すことができる。

$$P_{\beta,\beta'}[X(\xi)Y(\eta)] = 0$$

と変数分離法で解くかとができ、そのことからも解の積分表示を求めることができる。

また $\zeta = \dfrac{\eta}{\xi}$ とおき、$u = \xi^\lambda \phi(\zeta)$ とすると、方程式 $E(\beta, \beta')$ は次のガウスの超幾何方程式になる。

$$[\zeta(1-\zeta)\frac{d^2}{d\zeta^2} + \{1 - \lambda - \beta - (1 - \lambda + \beta')\zeta\}\frac{d}{dz} + \lambda\beta']\phi(\zeta) = 0$$

この方程式の列 $E(\beta + m, \beta'), E(\beta, \beta' + n) \quad m, n \in \mathbf{Z}$ は Laplace 列の１例である。β, β' のどちらかが整数であれば,Laplace 列は有限で終わり、解は $Z(\beta + m, \beta'), Z(\beta, \beta' + n)$ に属する関数の " 正則関数係数 " の線形結合で表される。これが Laplace の方法である。これを使って我々の特異初期値問題を解こうというわけである。この他多くのことが Darboux の本には書かれており是非参照されたい。

4. 補助関数

$z = \dfrac{4t}{x^2}$ とおき、$P_c(u(t, x)) = 0$ の解で

$$U^c_\alpha(t, x) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} U(z)$$

の形のものを見つけてみる。$P_c(U(z)) = 0$ に代入して計算すると、次のガウスの超幾何微分方程式が得られる。

$$[z(1-z)\frac{d^2}{dz^2}+\{-c-(\alpha+\frac{3}{2})z\}\frac{d}{dz}+\frac{\alpha(1-\alpha)}{4}]U(z)=0$$

我々の結果を述べるために重要な役割をはたす補助関数 $U_\alpha^c(t,x)$　　$\alpha, c \in$ $\mathbf{C}$ を次の特異初期値問題の解として定義する。

$$\begin{cases} P_c U_\alpha^c(t,x)=(tD_t^2-D_x^2-cD_t)U_\alpha^c(t,x)=0 \\ U_\alpha^c(0,x)=f_\alpha(x) \end{cases}.$$

$U_\alpha^c(t,x)$ は今まで述べたことより.

$$U_\alpha^c(t,x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha F(\frac{-\alpha}{2},\frac{-\alpha+1}{2},-c,\frac{4t}{x^2}).$$

と表すことができる。

P_c と D_x は可換であり、$D_x f_\alpha(x)=f_{\alpha+1}(x)$ であるから

$$\begin{cases} P_c(D_x U_\alpha^c(t,x))=D_x(P_c(D_x U_\alpha^c(t,x))=0 \\ D_x U_\alpha^c(0,x)=f_{\alpha-1}(x) \end{cases}.$$

となり

$$D_x U_\alpha^c(t,x)=U_{\alpha-1}^c(t,x)$$

である。

$$D_t P_c=P_{c-1}D_t$$

であり

$$\begin{cases} D_t(P_c(U_\alpha^c(t,x)))=P_{c-1}(U_\alpha^c(t,x)))=0 \\ D_t U_\alpha^c(0,x)=-\frac{1}{c}U_{\alpha-2}^c(0,x)=-\frac{1}{c}f_{\alpha-2}(x) \end{cases}.$$

このことより

$$D_t U_\alpha^c(t,x)=-\frac{1}{c}U_{\alpha-2}^{c-1}(t,x)$$

が成り立つ。これらより、一種の Laplace 列 $ker(P_{c+k})$　$k \in \mathbf{Z}$ の中で D_t が昇降演算子の働きをし、隣り合う $ker(P_{c+k})$ と $ker(P_{c+k-1})$ の関係付けるわけであり、D_x が同一の $ker(P_{c+k})$ のなかの階層構造をつくるわけである。

これらの補助関数 $U_{\alpha+r}^{c-k}(t,x)$　$r,k \in \mathbf{Z}$ の正則関数係数の無限級数として、最初の特異初期値問題を解く。これらの Laplace 列 $ker(P_{c+k})$ に属する補助関数の特異性（多価性）は共通性がある。Laplace 列は整数でパラ

メーター付けられ、特異性（多価性）を記述するモノドロミー行列は共通のスペクトル（固有値）を持つ。このことが重要である。（固有ベクトルは共通でない。）

なお、$\alpha = n \quad n \in \mathbf{N}$ の場合、$U_\alpha^c(t,x)$ は (t,x^2) の n 次多項式である。

5. 今までの結果

$c(0,x)$ が定数の場合、

[U-88] において

定理　原点の近傍 Ω を十分小さくとれば、この特異初期値問題に対し、$\Omega\backslash K$ の上の一般被覆面 $\widetilde{\Omega\backslash K}$ で正則な解が存在する。もう少し精確に云うと、解 $u(t,x)$ は次のように表現できる。

$$u(t,x) = \sum_{r=0}^{\infty}[u_r(t,x)U_{\alpha+r-1}^c(t,x) \quad + v_r(t,x)tD_tU_{\alpha+r}^c(t,x)]$$

ここで $u_r(t,x)$ と $v_r(t,x)$ は共通の領域 Ω で正則な関数であり $c = c(0,0)$ である。

c が非負の整数でない場合は、この解は一意的である。そうでない場合は $nullsolution$ を構成することができる。

$c(0,x)$ が定数の場合は Laplace 列 $ker(P_{c+k})$ は必要なく、$ker(P_c)$ の中の関数の正則関数係数の級数でこと足りている。

また、初期値が極を持つ場合

$$\begin{cases} Lu(t,x) = 0 \\ u(0,x) = w(x)k_{-n}(x) \quad (n \in \mathbf{N}). \end{cases}$$

ここで $w(x)$ は $\Omega \cap E$ で正則な関数であり、$k_\alpha(x) = \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha}(x) = \dfrac{\partial}{\partial \alpha}(\dfrac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)})$ である。もう少し詳しくすると、次のようである。

$$k_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+1)}x^\alpha(\log x + \psi(\alpha+1)) \\ |\alpha+1|!(-1)^{\alpha-1}x^\alpha \text{ for } \alpha = -n \quad (n \in \mathbf{N}). \end{cases}$$

この極性特異初期値問題を解くためには、もとの特異初期値問題の両辺を α に関して編微分して α を負の整数 $-n$ に制限すればよい。

$$\begin{cases} L\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}(t,x) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \alpha}(0,x) = w(x)\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial \alpha}(x) \end{cases}$$

$\dfrac{\partial u}{\partial \alpha}(t,x)|_{\alpha=-n}$ がこの場合の解を与える。

5. 今回の結果

$c(0,x)$ が定数でない場合、

定理 原点の近傍 Ω を十分小さくとれば、この特異初期値問題に対し、$\Omega\backslash K$ の上の一般被覆面 $\widetilde{\Omega\backslash K}$ で正則な解が存在する。もう少し精確に云うと、解 $u(t,x)$ は次のように表現できる。

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}[u_{r,k}(t,x)U^{c-k}_{\alpha+r-1}(t,x) \quad + v_{r,k}(t,x)tD_tU^{c-k}_{\alpha+r}(t,x)]$$

ここで $u_{r,k}(t,x)$ と $v_{r,k}(t,x)$ は共通の領域 Ω で正則な関数であり $c = c(0,0)$ である。

c が非負の整数でない場合は、この解は一意的である。そうでない場合は $nullsolution$ を構成することができる。

$c(0,x)$ が定数でない場合に初めて Laplace 列 $ker(P_{c+k})$ が必要となり、$ker(P_{c+k})$ の中の関数の正則関数係数の級数が必要となるのである。この解は、特性面 E_0 上には α と c に応じた特異性を持ち級数は (x^2-4t) の $-\infty$ べき方向には取っていないが、初期平面の上の特異性は $c = c(0,0)$ により決まっているし、また、級数は t の $-\infty$ べき方向に取るわけである。

また、初期値が極を持つ場合、前と同様、もとの特異初期値問題の両辺を α に関して偏微分して α を負の整数 $-n$ に制限すればよい。

参考文献

[D-96] G.Darboux Theorie generale des surfaces, t.IV,1896

[BG-73] M.S.Baouendi and C.Goulaouic, Cauchy problem with characteristic initial hypersurface, Comm.Pure Appl. Math., 26(1973).455-475

[T-79] H.Tahara, Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, Japan. J.Math.(N.S.),5(1979),245-347

[U-88] J.Urabe, Meromorphic representations of the solutions of the singular Cauchy problem II,J.Math.Kyoto Univ.28(1988),335-342

[M-00] T.Mandai, The method of Frobenius to Fuchsian partial differential Equations,J.Math.Soc.Japan,52(2000),645-672